2. Сложные проценты

2.1. Начисление сложных годовых процентов

Если проценты не выплачиваются сразу после их начисления, а присоединяются к сумме долга, применяют сложные проценты. Присоединение начисленных процентов к сумме базы начисления называют ***капитализацией процентов***.

Применим те же обозначения, что и в формуле наращения по простым процентам.

В конце первого года проценты равны величине Pi, а наращенная сумма составит $P + Pi = P(1 + i)$. К концу второго года она достигнет величины $P(1 + i) + P(1 + i)i = P(1 + i)^2$ и т.д. В конце n-го года наращенная сумма будет равна

$$S = P(1 + i)^n. \qquad (2.1)$$

Проценты за этот срок:

$$I = S - P = P[(1 + i)^n - 1].$$

Величину $(1 + i)^n$ называют ***множителем наращения*** по сложным процентам. Значения этого множителя для целых чисел n приводятся в таблицах сложных процентов.

Время при наращении по сложной ставке обычно измеряется как ACT/ACT.

ПРИМЕР 2.1. Какой величины достигнет долг, равный 1 млн руб. через 3 года при росте по сложной ставке 10% годовых?

По формуле (2.1) находим

$$S = 1\,(1 + 0{,}1)^3 = 1{,}331 \text{ \textit{млн руб}}.$$

Если в контракте ставка процентов изменяется, то применяют формулу:

$$S = P(1 + i_1)^{n_1}(1 + i_2)^{n_2}\dots(1 + i_k)^{n_k},$$

где $i_1, i_2, \dots, i_k$ — последовательные значения ставок; $n_1, n_2, \dots, n_k$ - периоды для соответствующих ставок.

ПРИМЕР 2.2. Срок ссуды — 3 года, базовая процентная ставка — 10% годовых плюс маржа 1% в оставшиеся годы. Множитель наращения в этом случае составит

$$q = (1 + 0,1)^1 (1 + 0,1)^2 = 1,4641.$$

Часто для начисления процентов срок не является целым числом.

Применяют три метода начисления процентов.

1. Наращенная сумма находится по формуле:

$$S = P(1+i)^{n_a}(1+i)^{n_b},$$

где n_a - целая часть периода начисления, n_b – дробная часть периода начисления.

2. Предполагает начисление процентов за целое число лет по формуле сложных процентов и за дробную часть срока по формуле простых процентов:

$$S = P(1+i)^{n_a}(1+n_b i) .$$

3. В правилах ряда коммерческих банков для некоторых операций проценты начисляются только за целое число лет или других периодов начисления. Дробная часть периода отбрасывается:

$$S = P(1+i)^{n_a} .$$

ПРИМЕР 2.3. Кредит в размере 1 млн руб. выдан на 2 года и 180 дней под 10% сложных годовых.

Найдем сумму долга на конец срока определим тремя методами:

1. $S = 1 \times 1,1^{2,5} = 1,269058706$ *млн руб.*
2. $S = 1 \times 1,1^2 \times (1+0,5 \times 0,1) = 1,2705$ *млн руб.*
3. $S = 1 \times 1,1^2 = 1,21$ *млн руб.*

Для того чтобы сопоставить результаты наращения по разным процентным ставкам, достаточно сравнить соответствующие множители наращения. При одинаковых уровнях процентных ставок соотношения этих множителей существенно зависят от срока. При $n > 1$ с увеличением срока различие в простых и сложных процентов увеличивается. Соотношение множителей наращения представлено на рис. 3.

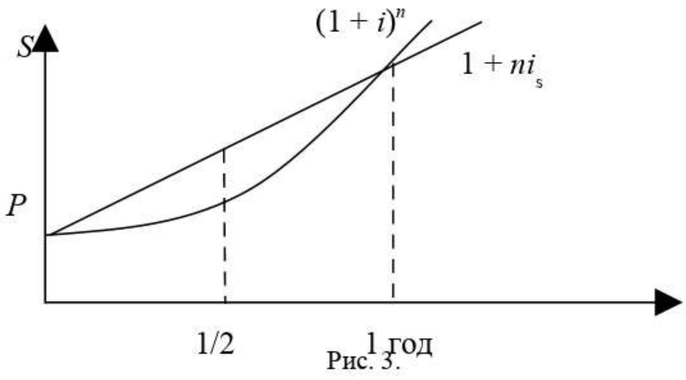

Рис. 3. Соотношение множителей наращения по простым и сложным процентам

2.2. Формулы удвоения

На основе формул для простых и сложных процентов

$$S = P + I = P + Pni = P(1 + ni),$$

$$S = P(1 + i)^n$$

получим следующие формулы удвоения:

- удвоение по простым процентам:

$$2 = 1 + ni \Rightarrow n = \frac{1}{i},$$

- удвоение по сложным процентам:

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1 + i)} = \frac{0{,}69315}{\ln(1 + i)}.$$

В общем случае для увеличения первоначальной суммы в N раз:

- по простым процентам:

$$N = 1 + ni \Rightarrow n = \frac{N - 1}{i},$$

- удвоение по сложным процентам:

$$N = (1 + i)^n \Rightarrow n = \frac{\ln N}{\ln(1 + i)}.$$

ПРИМЕР 2.4. Годовая ставка сложных процентов равна 8%. Через сколько лет начальная сумма удвоится?

Надо решить неравенство $(1+0{,}08)^n \geq 2$. Логарифмируем по основанию натуральных логарифмов и $n \geq \frac{\ln 2}{\ln(1{,}08)} = \frac{0{,}693}{0{,}076} \approx 9$.

Через 9 лет начальная сумма удвоится.

При работе со сложными процентами применяют ***правило 72***: если процентная ставка есть i, то удвоение капитала происходит примерно за $72/\ i$ лет.

Например, при ставке в 12% удвоение капитала происходит через 6 лет.

2.3. Наращение процентов m раз в году. Номинальная и эффективная ставки

В современных условиях проценты капитализируются, как правило, не один, а несколько раз в году — по полугодиям, кварталам и т.д. Некоторые зарубежные коммерческие банки практикуют даже ежедневное начисление процентов.

Пусть годовая ставка равна j, число периодов начисления в году — m. Каждый раз проценты начисляются по ставке j/m. Ставку j называют ***номинальной***. Формула наращения:

$$S = P(1 + \frac{j}{m})^{mn}, \qquad (2.2)$$

где $N=nm$ — общее количество периодов начисления.

ПРИМЕР 2.5. Какой величины достигнет долг, равный 1 млн руб. через 3 года при росте по сложной ставке 10% годовых, если проценты начисляются поквартально?

Период начисления $n = 3$ года, количество начислений процентов в течение года $m = 4$. Наращенная сумма:

$$S = 1(1 + \frac{0{,}1}{4})^{12} = 1{,}344889 \text{ млн руб}.$$

Действительная, или ***эффективная ставка процента*** — это годовая ставка сложных процентов, которая дает тот же результат, что и m - разовое начисление процентов по ставке j/m. Она измеряет тот реальный относительный доход, который получают в целом за год.

Обозначим эффективную ставку через i. Множители наращения, рассчитанные по эффективной и номинальной ставкам, должны быть равны друг другу:

$$(1+i)^n = (1+\frac{j}{m})^{mn}.$$

Отсюда

$$i = (1+\frac{j}{m})^m - 1.$$

Эффективная ставка при $m > 1$ больше номинальной.

Определение номинальной ставки j по заданным значениям i и m:

$$j = m(\sqrt[m]{1+i} - 1).$$

2.4. Дисконтирование по сложной ставке

Определим первоначальную сумму по наращенной через математическое дисконтирование:

$$P = \frac{S}{(1+i)^n}$$

и когда проценты начисляются m раз в году:

$$P = \frac{S}{(1+\frac{j}{m})^{mn}}.$$

ПРИМЕР 2.6. Сумма в 5 млн руб. выплачивается через 5 лет. Необходимо определить ее современную величину при условии, что применяется ставка сложных процентов, равная 12% годовых. Современная величина равна

$$P = \frac{5000}{(1+0{,}12)^5} = 2837{,}1\ руб,$$

т.е. первоначальная сумма сократилась почти на 44%.

При банковском учете применяют сложную учетную ставку. В этих случаях процесс дисконтирования происходит с замедлением, так как каждый раз учетная ставка применяется не к первоначальной сумме, а к сумме, дисконтированной на предыдущем шаге во времени. Дисконтирование по сложной учетной ставке выгоднее для должника, чем по простой учетной ставке:

$$P = S(1-d)^n,$$

где d — сложная годовая учетная ставка.

ПРИМЕР 2.7. Долговое обязательство на сумму 5 млн руб., срок оплаты которого наступает через 5 лет, продано с дисконтом по сложной учетной ставке 15% годовых. Каков размер полученной за долг суммы и величина дисконта (в тыс. руб.)?

Имеем

$$P = 5000(1 - 0{,}15)^5 = 2218{,}5; \quad D = 5000 - 2218{,}5 = 2781{,}5.$$

Если применить простую учетную ставку того же размера, то

$$P = 5000(1 - 5 \times 0{,}15) = 1250; D = 5000 - 1250 = 3750.$$

2.5. Номинальная и эффективная учетные ставки

Дисконтирование может производиться не один, а m раз в году, т.е. каждый раз учет производится по ставке f/m. В этом случае

$$P = S\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn},$$

где f — номинальная учетная ставка.

Эффективная учетная ставка (d) характеризует степень дисконтирования за год. Определим ее на основе равенства дисконтных множителей:

$$(1 - d)^n = \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn},$$

откуда

$$d = 1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{m}.$$

Эффективная учетная ставка во всех случаях, когда $m > 1$, меньше номинальной.

ПРИМЕР 2.8. По данным примера 2.6 определим сумму, полученную при поквартальном учете по номинальной учетной ставке 15%, и эффективную учетную ставку. Имеем $f = 0{,}15$; $m = 4$; $mn = 20$;

$$P = 5000\left(1 - \frac{0{,}15}{4}\right)^{20} = 2328{,}0 \text{ тыс. руб}.$$

Эффективная учетная ставка составит

$$d = 1 - \left(1 - \frac{0{,}15}{4}\right)^{4} = 0{,}14177, \quad \text{или} \ 14{,}177\%.$$

2.6. Определение срока ссуды и размера процентной ставки

При наращении по сложной годовой ставке i и по номинальной ставке j на основе формул (2.1) и (2.2) имеем

$$n = \frac{\log(S/P)}{\log(1+i)}, \tag{2.3}$$

$$n = \frac{\log(S/P)}{m \cdot \log(1+\frac{j}{m})}. \tag{2.4}$$

При дисконтировании по сложной годовой учетной ставке d и по номинальной учетной ставке f получим

$$n = \frac{\log(S/P)}{\log(1-d)},$$

$$n = \frac{\log(S/P)}{m \cdot \log(1-\frac{f}{m})}.$$

ПРИМЕР 2.9. За какой срок в годах сумма, равная 75 млн руб., достигнет 200 млн руб. при начислении процентов по сложной ставке 15% раз в году и поквартально?

По формулам (2.3) и (2.4) получим следующие сроки:

$$n = \frac{\log(200/75)}{\log 1{,}15} = 7{,}0178 \textit{ года},$$

$$n = \frac{\log(200/75)}{4 \cdot \log(1+\frac{0{,}15}{4})} = 6{,}6607 \textit{ года}.$$

При наращении по сложной годовой ставке процентов i и по номинальной ставке j получим эффективную и номинальную ставки:

$$i = \sqrt[n]{S/P} - 1, \tag{2.5}$$

$$j = m(\sqrt[mn]{S/P} - 1).$$

При дисконтировании по сложным учетным ставкам

$$d = 1 - \sqrt[n]{P/S}), \tag{2.6}$$

$$f = m(1 - \sqrt[mn]{P/S}).$$

ПРИМЕР 2.10. Сберегательный сертификат куплен за 100 тыс. руб., выкупная его сумма 160 тыс. руб., срок 2,5 года. Каков уровень доходности инвестиций в виде годовой ставки сложных процентов? По формуле (2.5) находим

$$i = \sqrt[2{,}5]{1{,}6/1} - 1 = 0{,}20684.$$

ПРИМЕР 2.11. Срок до погашения векселя равен 2 годам. Дисконт при его учете составил 30%. Какой сложной годовой учетной ставке соответствует этот дисконт?

Применим формулу (2.6). По данным задачи P/S=0,7, откуда

$$d = 1 - \sqrt{0{,}7} = 0{,}16334.$$

2.7. Конверсия валюты и наращение процентов

При возможности обмена рублевых средств на СКВ и обратной конверсии целесообразно сравнить доходы от непосредственного размещения имеющихся денежных средств в депозиты и через другую валюту. Возможны четыре варианта для наращения процентов с конверсией денежных ресурсов и без нее:

- без конверсии: **СКВ → СКВ**;
- с конверсией: **СКВ → Руб → Руб → СКВ**;
- без конверсии: **Руб → Руб**;
- с конверсией: **Руб → СКВ → СКВ → Руб**.

Обозначим:

P_v — сумма депозита в СКВ,
P_r — сумма депозита в рублях,
S_v — наращенная сумма в СКВ,
S_r — наращенная сумма в рублях,
K_0 — курс обмена в начале операции (курс СКВ в рублях),
K_1 — курс обмена в конце операции,
n — срок депозита,
i — ставка наращения для рублевых сумм,
j — ставка наращения для конкретного вида СКВ.

Вариант СКВ → Руб → Руб → СКВ.

Операция предполагает обмен валюты на рубли, наращение процентов на эту сумму и конвертирование в исходную валюту. Конечная (наращенная) сумма в валюте определяется как

$$S_v = P_v K_0 (1 + ni) \frac{1}{K_1}.$$

Множитель наращения m с учетом двойного конвертирования здесь имеет вид

$$m = K_0(1+ni)\frac{1}{K_1} = \frac{K_0}{K_1}(1+ni) = \frac{1+ni}{K_1/K_0}$$

ПРИМЕР 2.12. Предполагается поместить 1000 долл. на рублевом депозите. Курс продажи на начало срока депозита 30,12 руб. за \$1, курс покупки доллара в конце операции 31,1 руб. Процентные ставки: на рублевом депозите i = 20%; на валютном j = 6% (360/360). Срок депозита — 1 квартал.

$$S_v = 1000 \times \frac{30{,}12}{31{,}1}\left(1+\frac{3}{12}\times 0{,}2\right) = 1016{,}91\,долл.$$

В свою очередь прямое наращение исходной долларовой суммы по долларовой ставке процента дает

$$S_v = 1000(1+0{,}25\times 0{,}06) = 1015\,долл.$$

Для определения доходности операции в целом примем простую годовую ставку процента $i_э$. Эта ставка характеризует рост суммы P_v до величины S_v:

$$i_э = \frac{S_v - P_v}{P_v n}.$$

Или:

$$i_э = \left[\frac{K_0}{K_1}(1+ni) - 1\right] / n = \frac{m-1}{n}.$$

Величину, характеризующую отношение последнего и первого курсов валюты, обозначим:

$$k = \frac{K_0}{K_1}.$$

С увеличением k эффективность операции падает. При $k = 1$ параметр $i_э = i$, при $k > 1$ параметр $i_э < i$, наконец, при самой благоприятной для владельца денег ситуации $k < 1$ имеем $i_э > i$.

Вариант Руб - СКВ - СКВ - Руб.

Наращенная сумма будет иметь вид:

$$S_r = \frac{P_r}{K_0}(1-nj)K_1 = P_r(1+nj)\frac{K_1}{K_0}.$$

ПРИМЕР 2.13. Продолжим пример 2.12. Допустим, необходимо поместить на валютном депозите сумму в рублях (1 млн руб.). Наращенная сумма в рублях к концу срока составит:

$$S_r = 1000 \times (1 + 0,25 \times 0,06)\frac{31,1}{30,12} = 1048,02 \text{ тыс. руб}.$$

Прямое инвестирование в рублевый депозит дает больше:

$$S_r = 1000 \times (1 + 0,25 \times 0,2) = 1050 \text{ тыс. руб}.$$

Доходность операции определяется как

$$i_э = \frac{S_v - P_v}{P_v n}.$$

$$i_э = \left(\frac{K_1}{K_0}(1 + nj) - 1\right) / n = (k(1 + nj) - 1)/n.$$

Зависимость показателя эффективности от k, как видим, линейная. При $k = 1$ $i_э = j$, при $k > 1$ параметр $i_э > j$, наконец, при $k < 1$ параметр $i_э < j$.

Заключение

Сложные проценты, **реинвестирование** или **капитализация** — это очень важные явления в банковских финансах. В долгосрочном периоде, депозит со сложным начислением процентов может показать невиданное ускорение роста капитала, при этом сохраняя риск потерь на относительно низком уровне. *Сложные проценты могут превратить ваш сравнительно небольшой вклад в машину, которая зарабатывает вам приличный капитал.*